Kolokwium nr 2 z **analizy matematycznej II.1**

12 stycznia 2023,

110 minut

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.

Zadanie 1.

a) Wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ oraz funkcja różniczkowalna $g = (g_1, g_2) : (-\varepsilon, \varepsilon)\times(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ taka, że

$$\forall_{x,y\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \begin{cases} (1+y)e^{g_1(x,y)} + (1+x)e^{g_2(x,y)} = 2 \\ 2g_1(x,y)e^y + g_2(x,y)e^x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

b) Rozstrzygnąć, czy istnieje taki $\varepsilon > 0$, że funkcja różniczkowalna

$$g = (g_1, g_2) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$$

spełniająca warunek (1) jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy zbiór M jest rozmaitością jeśli:

a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^6 + 3x^2y^2 = 3x^4y + y^3\}$, wmr..

b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 - x^8 = 2x^2y^4\}$.

W przypadku odpowiedzi twierdzącej podać wymiar rozmaitości.

Zadanie 3. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x + y^2) - f(x, y)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Wyznaczyć $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$. Rozstrzygnąć, czy f ma w $(0, 0)$ ekstremum lokalne.

Zadanie 4. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2.$$

Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f i dla każdego z tych punktów sprawdź, czy f ma w tym punkcie ekstremum lokalne. Czy funkcja f osiąga swoje kresy?